ARITMÉTICA ELEMENTAL

5 ÷ 3

8 = 2

\+ x

LUIS MINGUILLÓN PASCUAL

Prefacio

La aritmética ha acompañado al ser humano desde los albores de la civilización. Contar, medir, distribuir, comparar… son acciones tan cotidianas que muchas veces no percibimos que detrás de ellas se encuentra una estructura lógica poderosa y sencilla: la aritmética. Este libro nace con la intención de ofrecer una guía clara, práctica y accesible para quienes desean iniciarse en este fascinante universo numérico.

Está dirigido a estudiantes, adultos en formación, autodidactas, docentes o cualquier persona que quiera comprender las operaciones básicas con números de manera gradual, razonada y aplicada. No se requiere experiencia previa; sólo curiosidad, constancia y una pizca de paciencia.

A lo largo de sus páginas, el lector encontrará explicaciones sencillas, ejemplos cotidianos y ejercicios cuidadosamente seleccionados. La meta no es memorizar fórmulas sin sentido, sino **comprender** los fundamentos que permiten resolver problemas reales: desde calcular el cambio en una compra hasta entender una factura o planificar un presupuesto.

La aritmética no es sólo una herramienta escolar, es una aliada en la vida diaria. Aprenderla con sentido y confianza puede abrir muchas puertas: académicas, laborales y personales. Ojalá este libro contribuya, aunque sea modestamente, a que el lector descubra que los números no son enemigos, sino una forma clara y ordenada de ver el mundo.

ÍNDICE

Capítulo 1: Números Naturales

1.1 Introducción a los Números Naturales

Los números naturales son los primeros números que aprendemos desde la infancia. Se utilizan para contar objetos, ordenar elementos y realizar operaciones básicas. Son fundamentales para el estudio de las matemáticas.

Conjunto de números naturales:
N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}

Nota: En algunos contextos se incluye el 0 como número natural, es decir, N = {0, 1, 2, 3, ...}. En esta lección, trabajaremos sin incluir el 0, a menos que se indique lo contrario.

1.2 Propiedades de los Números Naturales

- Son infinitos: no hay un número natural más grande, siempre se puede sumar 1 y obtener otro.
- Son ordenados: se pueden comparar (mayor que, menor que, igual).
- Tienen un sucesor único: a cada número le sigue otro, sumando 1.
- No tienen antecesor definido (excepto desde el 2): el 1 no tiene un número natural anterior.
- No hay números negativos ni fraccionarios en los números naturales.

1.3 Representación de Números Naturales

- Recta numérica: se pueden ubicar en una recta, hacia la derecha crecen.
- Sistema decimal: cada número se puede descomponer en unidades, decenas, centenas, etc.

Ejemplo:
El número 437 se puede descomponer como:
400 + 30 + 7 = 4 centenas + 3 decenas + 7 unidades

1.4 Operaciones Básicas con Números Naturales

1.4.1 Suma

Es la operación de reunir cantidades. El resultado se llama suma o total.

Ejemplo:
5 + 3 = 8

Propiedades:

- Conmutativa: a + b = b + a
- Asociativa: (a + b) + c = a + (b + c)
- Elemento neutro: a + 0 = a

1.4.2 Resta

Es la operación de quitar una cantidad de otra. El resultado se llama diferencia.

Ejemplo:
9 - 4 = 5

Nota: En los números naturales, no se puede restar un número mayor de uno menor sin salir del conjunto.

1.4.3 Multiplicación

Es la suma repetida de un número tantas veces como indica otro.

Ejemplo:
$4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$

Propiedades:

- Conmutativa: $a \times b = b \times a$
- Asociativa: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- Distributiva respecto a la suma: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- Elemento neutro: $a \times 1 = a$

1.4.4 División

Es repartir o agrupar en partes iguales. El resultado se llama cociente.

Ejemplo:
$12 \div 3 = 4$

Nota: La división exacta entre naturales puede no ser posible. En ese caso se puede expresar con un residuo.

Ejemplo:
$13 \div 4 = 3$ y sobra 1 (residuo)

1.5 Múltiplos y Divisores

Múltiplo: un número es múltiplo de otro si lo contiene exactamente cierta cantidad de veces.

Ejemplo:
12 es múltiplo de 4 porque $4 \times 3 = 12$

Divisor: un número es divisor de otro si lo divide exactamente.

Ejemplo:
4 es divisor de 12 porque $12 \div 4 = 3$ sin residuo

1.6 Números Primos y Compuestos

Número primo: tiene solo dos divisores: él mismo y el 1.

Ejemplos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...

Número compuesto: tiene más de dos divisores.

Ejemplos: 4, 6, 8, 9, 10, 12...

El número 1 no es primo ni compuesto.

1.7 Mínimo Común Múltiplo (mcm)

Es el menor número natural que es múltiplo común de dos o más números.

Método:

1. Se descomponen los números en factores primos
2. Se toma cada factor con el mayor exponente
3. Se multiplican

Ejemplo:
mcm(6, 8)
$6 = 2 \times 3$
$8 = 2^3$
mcm = $2^3 \times 3 = 24$

1.8 Máximo Común Divisor (MCD)

Es el mayor número que divide exactamente a dos o más números.

Método:

1. Se descomponen en factores primos
2. Se toman los factores comunes con el menor exponente
3. Se multiplican

Ejemplo:
mcd(12, 18)
$12 = 2^2 \times 3$
$18 = 2 \times 3^2$
MCD = $2 \times 3 = 6$

1.9 Potencias

Es una forma de escribir multiplicaciones repetidas del mismo número.

Ejemplo:
$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

Base: el número que se multiplica
Exponente: el número de veces que se multiplica la base

Propiedades:

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$ (si $a \neq 0$)
- $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$
- $(a^m)^n = a^{(m \times n)}$

1.10 Problemas Aplicados

1. Si Juan tiene 4 cajas con 6 canicas cada una, ¿cuántas canicas tiene en total?
   Solución: $4 \times 6 = 24$ canicas

2. Un número tiene como divisores 1, 2, 3, 6. ¿Es primo o compuesto?
   Solución: Es compuesto, porque tiene más de dos divisores.
3. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 3 y 5?
   Solución:
   3 = 3
   5 = 5
   mcm = 3 × 5 = 15
4. ¿Cuántos múltiplos de 4 hay entre 1 y 20?
   Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20
   Respuesta: 5 múltiplos

Ejercicios Números naturales

Nivel 1: Básico (Problemas 1–10)

1. ¿Cuál es el siguiente número natural después del 8?
Solución: 9
Explicación: Los números naturales siguen una secuencia ordenada. Después del 8 viene el 9.

2. ¿Cuál es la suma de 4 y 7?
Solución: 11
Explicación: 4 + 7 = 11. Sumar dos naturales da otro natural.

3. ¿Cuánto es 15 – 9?
Solución: 6
Explicación: 15 menos 9 da 6. La resta entre dos naturales es otro natural (si el minuendo es mayor).

4. Escribe los primeros 5 números naturales.
Solución: 1, 2, 3, 4, 5
Explicación: Los números naturales comienzan desde 1.

5. ¿Cuál es el doble de 6?
Solución: 12
Explicación: El doble de un número es multiplicarlo por 2 → 6 × 2 = 12.

6. ¿Cuál es el triple de 4?
Solución: 12
Explicación: Triple significa multiplicar por 3 → 4 × 3 = 12.

7. ¿Cuánto falta a 9 para llegar a 15?
Solución: 6
Explicación: 15 – 9 = 6

8. ¿Qué número sumado a 3 da 10?
Solución: 7
Explicación: 3 + 7 = 10, por lo tanto, el número es 7.

9. Si tienes 2 cajas con 5 bolígrafos cada una, ¿cuántos bolígrafos hay en total?
Solución: 10
Explicación: $2 \times 5 = 10$

10. Escribe el número natural que está entre el 19 y el 21.
Solución: 20
Explicación: Entre 19 y 21 solo está el 20.

Nivel 2: Intermedio (Problemas 11–20)

11. Si compro 3 paquetes de galletas y cada uno tiene 8 unidades, ¿cuántas galletas tengo?
Solución: 24
Explicación: $3 \times 8 = 24$

12. ¿Cuántos números naturales hay entre 5 y 10 (sin incluirlos)?
Solución: 4
Explicación: Los números son 6, 7, 8, 9 → total: 4

13. Si sumas tres veces el número 4, ¿qué obtienes?
Solución: 12
Explicación: $4 + 4 + 4 = 12$

14. ¿Qué número multiplicado por 5 da 35?
Solución: 7
Explicación: $35 \div 5 = 7$

15. ¿Cuál es la mitad de 18?
Solución: 9
Explicación: $18 \div 2 = 9$

16. Si un niño tiene 7 años, ¿cuántos años tendrá dentro de 6 años?
Solución: 13
Explicación: $7 + 6 = 13$

17. Si restas 12 de un número y obtienes 5, ¿cuál era el número?
Solución: 17
Explicación: $x - 12 = 5 \rightarrow x = 5 + 12 = 17$

18. Encuentra el valor de: $4 \times 3 + 2$
Solución: 14
Explicación: Multiplica primero: $4 \times 3 = 12$, luego suma 2 → $12 + 2 = 14$

19. Un libro cuesta 8 €, ¿cuánto cuestan 6 libros iguales?
Solución: 48 €
Explicación: $8 \times 6 = 48$

20. Si tienes 5 grupos de 4 niños, y llegan 3 más por grupo, ¿cuántos niños hay ahora?
Solución: 35
Explicación: 5 grupos $\times (4 + 3) = 5 \times 7 = 35$

Nivel 3: Avanzado (Problemas 21–30)

21. ¿Qué número multiplicado por 4 y luego sumado a 5 da 29?
Solución: 6
Explicación: $4x + 5 = 29 \rightarrow 4x = 24 \rightarrow x = 6$

22. En una caja hay 10 paquetes y cada paquete tiene 5 sobres. ¿Cuántos sobres hay en total?
Solución: 50
Explicación: $10 \times 5 = 50$

23. Un tren tiene 12 vagones con 24 personas en cada uno. ¿Cuántas personas hay en total?
Solución: 288
Explicación: $12 \times 24 = 288$

24. ¿Cuántos números naturales de dos cifras terminan en 7?
Solución: 9
Explicación: Son: 17, 27, ..., 97 → total: 9

25. Un número más su doble es 36. ¿Cuál es el número?
Solución: 12
Explicación: $x + 2x = 36 \rightarrow 3x = 36 \rightarrow x = 12$

26. ¿Cuántos pares de calcetines hay en 10 cajones con 3 pares cada uno?
Solución: 30
Explicación: $10 \times 3 = 30$

27. En una fiesta hay 8 mesas con 6 personas cada una. Si se van 12 personas, ¿cuántas quedan?
Solución: 36
Explicación: $8 \times 6 = 48 \rightarrow 48 - 12 = 36$

28. Un número multiplicado por 3 y restado 4 da 14. ¿Cuál es el número?
Solución: 6
Explicación: $3x - 4 = 14 \rightarrow 3x = 18 \rightarrow x = 6$

29. ¿Cuántos números naturales hay entre 1 y 100 que sean múltiplos de 5?
Solución: 19
Explicación: Múltiplos de 5 entre 1 y 100: 5, 10, ..., 95 → $95 \div 5 = 19$

30. Un teatro tiene 15 filas con 20 asientos cada una. ¿Cuántas personas caben en total?
Solución: 300
Explicación: $15 \times 20 = 300$

Capítulo 2: Operaciones Básicas

Introducción

Las operaciones básicas constituyen el fundamento de las matemáticas y de muchos lenguajes de programación. En este capítulo, aprenderás los conceptos esenciales de las operaciones aritméticas fundamentales, cómo se utilizan, sus propiedades, y cómo aplicarlas correctamente tanto en el papel como en programas informáticos. Comprender estas operaciones es indispensable para resolver problemas, construir algoritmos, realizar cálculos financieros, procesar datos y modelar situaciones de la vida real.

Contenido:

1. Definición de operaciones básicas
2. Suma
3. Resta
4. Multiplicación
5. División
6. Jerarquía de operaciones
7. Uso de paréntesis
8. Propiedades de las operaciones
9. Casos especiales y errores comunes
10. Aplicaciones prácticas
11. Ejercicios propuestos
12. Definición de operaciones básicas

Las operaciones básicas son aquellas operaciones matemáticas elementales con las que se construyen cálculos más complejos. Estas operaciones son: suma, resta, multiplicación y división. Su dominio es esencial tanto en contextos académicos como cotidianos.

2. Suma

La suma es la operación que consiste en agregar cantidades. Se representa con el signo '+' y su resultado se llama suma o total.

Ejemplo:
5 + 3 = 8

Propiedades de la suma:

- Conmutativa: a + b = b + a
- Asociativa: (a + b) + c = a + (b + c)
- Elemento neutro: a + 0 = a

Aplicaciones:

- Sumar precios

- Calcular cantidades acumuladas
- Contar elementos

3. Resta

La resta es la operación de encontrar la diferencia entre dos números. Se representa con el signo '-' y su resultado se llama diferencia.

Ejemplo:
$7 - 4 = 3$

Propiedades de la resta:

- No es conmutativa: $a - b \neq b - a$
- No es asociativa: $(a - b) - c \neq a - (b - c)$
- Elemento neutro: $a - 0 = a$

Aplicaciones:

- Comparar cantidades
- Calcular cambio o diferencia
- Determinar pérdidas

4. Multiplicación

La multiplicación representa una suma repetida. Se representa con el signo '×' o '*' y su resultado se llama producto.

Ejemplo:
$4 \times 3 = 12$

Propiedades de la multiplicación:

- Conmutativa: $a \times b = b \times a$
- Asociativa: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- Distributiva respecto a la suma: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- Elemento neutro: $a \times 1 = a$
- Elemento absorbente: $a \times 0 = 0$

Aplicaciones:

- Cálculos de área
- Repetición de cantidades
- Proporciones

5. División

La división consiste en repartir una cantidad en partes iguales. Se representa con el signo '÷' o '/', y su resultado se llama cociente.

Ejemplo:
$12 \div 3 = 4$

Propiedades de la división:

- No es conmutativa: $a \div b \neq b \div a$
- No es asociativa: $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$
- $a \div 1 = a$
- No se puede dividir por cero

Aplicaciones:

- Repartir objetos
- Calcular proporciones
- Escalar cantidades

6. Jerarquía de operaciones

Cuando se combinan varias operaciones en una misma expresión, es importante respetar el orden en que deben resolverse para obtener el resultado correcto.

Regla:

1. Paréntesis
2. Potencias y raíces
3. Multiplicación y división (de izquierda a derecha)
4. Suma y resta (de izquierda a derecha)

Ejemplo:
$5 + 3 \times 2 = 5 + 6 = 11$
$(5 + 3) \times 2 = 8 \times 2 = 16$

7. Uso de paréntesis

Los paréntesis sirven para alterar la jerarquía normal de las operaciones o agrupar partes de una expresión.

Ejemplo:
$(2 + 3) \times 4 = 5 \times 4 = 20$
$2 + (3 \times 4) = 2 + 12 = 14$

8. Propiedades de las operaciones

Resumen de las propiedades más importantes:

- Conmutatividad (suma, multiplicación)
- Asociatividad (suma, multiplicación)
- Distributividad (multiplicación respecto a suma o resta)
- Elementos neutros (0 para suma, 1 para multiplicación)

- Elemento absorbente (0 para multiplicación)

9. Casos especiales y errores comunes

- Dividir entre cero no tiene resultado definido.
- No respetar la jerarquía de operaciones puede cambiar totalmente el resultado.
- Multiplicar por cero anula cualquier número.
- Restar números mayores a menores da resultados negativos.

10. Aplicaciones prácticas

Las operaciones básicas se usan para:

- Presupuestos y contabilidad
- Estadísticas y análisis de datos
- Construcción de algoritmos en programación
- Resolución de problemas cotidianos
- Control de inventarios
- Cálculo de distancias, tiempos y velocidades

11. Ejercicios propuestos
12. Resuelve: 7 + 3 × 2
13. Resuelve: (8 - 5) × 4
14. Calcula: 24 ÷ 6 + 2 × 3
15. Aplica la propiedad distributiva: 5 × (4 + 2)
16. Indica si es verdadera: (3 + 4) × 2 = 3 × 2 + 4 × 2
17. Encuentra el error: 6 + 2 × 5 = 40
18. ¿Cuál es el resultado de: (10 - 2) ÷ (4 - 2)?
19. Si tienes 8 manzanas y das 3, ¿cuántas te quedan?
20. ¿Cuántas galletas tiene cada niño si repartes 36 entre 6 niños?
21. Escribe un problema de la vida real que se resuelva con multiplicación y resuélvelo.

Conclusión

Dominar las operaciones básicas es el primer paso hacia una comprensión profunda de las matemáticas, la lógica y la programación. Son herramientas que usamos todos los días, de formas tan simples como contar monedas hasta tan complejas como diseñar sistemas informáticos. Practica con frecuencia, verifica tus resultados, y asegúrate de comprender no solo el "cómo" sino también el "por qué" de cada operación.

EJERCICIOS DE OPERACIONES BÁSICAS

Nivel 1: Básico

1. **5 + 3 = ?**
   Solución: 8
   Explicación: Sumar 5 y 3 da como resultado 8.
2. **9 - 4 = ?**
   Solución: 5
   Explicación: Al quitar 4 a 9, quedan 5 unidades.
3. **2 × 3 = ?**
   Solución: 6
   Explicación: Multiplicar 2 por 3 es como sumar 2 tres veces: 2 + 2 + 2 = 6.
4. **8 ÷ 2 = ?**
   Solución: 4
   Explicación: Dividir 8 en 2 partes iguales da 4 por parte.
5. **6 + 7 - 2 = ?**
   Solución: 11
   Explicación: Primero sumamos 6 + 7 = 13, luego restamos 2, obteniendo 11.

Nivel 2: Intermedio

6. **4 × 5 + 3 = ?**
   Solución: 23
   Explicación: Multiplicamos primero: 4 × 5 = 20. Luego sumamos: 20 + 3 = 23.
7. **(6 + 2) × 3 = ?**
   Solución: 24
   Explicación: Primero se resuelve el paréntesis: 6 + 2 = 8. Luego: 8 × 3 = 24.
8. **15 ÷ 3 + 2 = ?**
   Solución: 7
   Explicación: Primero dividimos: 15 ÷ 3 = 5. Luego: 5 + 2 = 7.
9. **20 - 3 × 4 = ?**
   Solución: 8
   Explicación: Primero se hace la multiplicación: 3 × 4 = 12. Luego: 20 - 12 = 8.
10. **(12 - 4) ÷ 2 = ?**
    Solución: 4
    Explicación: Paréntesis primero: 12 - 4 = 8. Después: 8 ÷ 2 = 4.

Nivel 3: Medio-Alto

11. **5 × (3 + 2) - 6 = ?**
    Solución: 19
    Explicación: Paréntesis: 3 + 2 = 5. Luego: 5 × 5 = 25. Finalmente: 25 - 6 = 19.

12. **(18 ÷ 3) + (4 × 2) = ?**
Solución: 14
Explicación: 18 ÷ 3 = 6, 4 × 2 = 8. Suma: 6 + 8 = 14.

13. **(10 + 6) ÷ 4 = ?**
Solución: 4
Explicación: Paréntesis: 10 + 6 = 16. División: 16 ÷ 4 = 4.

14. **30 ÷ 5 × 2 = ?**
Solución: 12
Explicación: Operaciones de izquierda a derecha: 30 ÷ 5 = 6, luego 6 × 2 = 12.

15. **(8 × 3) - (10 ÷ 2) = ?**
Solución: 19
Explicación: 8 × 3 = 24, 10 ÷ 2 = 5. Resta: 24 - 5 = 19.

Nivel 4: Avanzado

16. **6 + 2 × (4 + 1) = ?**
Solución: 16
Explicación: Paréntesis: 4 + 1 = 5. Multiplicación: 2 × 5 = 10. Suma: 6 + 10 = 16.

17. **(24 ÷ 3) + (5 × 2) - 4 = ?**
Solución: 14
Explicación: 24 ÷ 3 = 8, 5 × 2 = 10, luego 8 + 10 = 18, menos 4 = 14.

18. **(12 - 3) × (2 + 1) = ?**
Solución: 27
Explicación: 12 - 3 = 9, 2 + 1 = 3, multiplicamos: 9 × 3 = 27.

19. **40 ÷ (2 × 5) = ?**
Solución: 4
Explicación: Paréntesis: 2 × 5 = 10. Luego: 40 ÷ 10 = 4.

20. **(16 ÷ 4) + (3 × 3) - 2 = ?**
Solución: 9
Explicación: 16 ÷ 4 = 4, 3 × 3 = 9, sumamos: 4 + 9 = 13, restamos 2: 13 - 2 = 11.

Nivel 5: Desafío

21. **(5 + 3) × (2 + 6) = ?**
Solución: 64
Explicación: 5 + 3 = 8, 2 + 6 = 8, multiplicamos: 8 × 8 = 64.

22. **(10 × 2 - 4) ÷ 3 = ?**
Solución: 5.33
Explicación: 10 × 2 = 20, 20 - 4 = 16, 16 ÷ 3 ≈ 5.33

23. **50 - (8 + 2 × 5) = ?**
Solución: 30
Explicación: Primero 2 × 5 = 10, luego 8 + 10 = 18, después 50 - 18 = 32.

24. **[(6 + 2) × 3] - [(4 × 2) + 1] = ?**
Solución: 13
Explicación: (6 + 2) × 3 = 8 × 3 = 24, (4 × 2) + 1 = 8 + 1 = 9. Finalmente: 24 - 9 = 15.

25. **[(9 - 3) × (8 ÷ 2)] + 7 = ?**
Solución: 25
Explicación: 9 - 3 = 6, 8 ÷ 2 = 4, multiplicamos: 6 × 4 = 24, sumamos 7: 24 + 1 = 25.

Nivel 6: Extra desafío

26. **(3 + 2) × (7 - 4) ÷ (6 ÷ 3) = ?**
Solución: 7.5
Explicación: (3 + 2) = 5, (7 - 4) = 3, (6 ÷ 3) = 2. Multiplicación: 5 × 3 = 15. División: 15 ÷ 2 = 7.5

27. **[4 + (5 × 3)] - [2 × (6 - 2)] = ?**
Solución: 13
Explicación: 5 × 3 = 15, 4 + 15 = 19; 6 - 2 = 4, 2 × 4 = 8; 19 - 8 = 11

28. **{[(8 + 4) × 2] ÷ 4} + 6 = ?**
Solución: 12
Explicación: 8 + 4 = 12, 12 × 2 = 24, 24 ÷ 4 = 6, 6 + 6 = 12

29. **100 ÷ (5 × 4) + 3 × (2 + 1) = ?**
Solución: 21
Explicación: 5 × 4 = 20, 100 ÷ 20 = 5; 2 + 1 = 3, 3 × 3 = 9. Resultado: 5 + 9 = 14

30. **((3 + 5) × (6 ÷ 2)) + (9 - 4) = ?**
Solución: 29
Explicación: 3 + 5 = 8, 6 ÷ 2 = 3 → 8 × 3 = 24; 9 - 4 = 5 → 24 + 5 = 29

CAPITULO 3: MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

I. INTRODUCCIÓN

La multiplicación y la división son dos de las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética. Son operaciones inversas entre sí y se utilizan en la vida cotidiana, en matemáticas más avanzadas y en áreas como la ciencia, la economía y la informática. Aprenderlas bien es clave para resolver problemas y comprender conceptos matemáticos más complejos.

II. MULTIPLICACIÓN

1. ¿QUÉ ES LA MULTIPLICACIÓN?

La multiplicación es una forma abreviada de sumar un número varias veces. Si sumamos 4 veces el número 3 (3 + 3 + 3 + 3), estamos haciendo una multiplicación: 4 × 3.

2. ELEMENTOS DE LA MULTIPLICACIÓN

Ejemplo: 4 × 3 = 12

- Factores: 4 y 3
- Producto: 12

3. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

a) Propiedad conmutativa: el orden de los factores no altera el producto.
Ejemplo: 4 × 3 = 3 × 4 = 12

b) Propiedad asociativa: el modo de agrupar tres o más factores no cambia el resultado.
Ejemplo: (2 × 3) × 4 = 2 × (3 × 4)

c) Propiedad distributiva: la multiplicación se distribuye sobre la suma.
Ejemplo: 3 × (2 + 4) = 3 × 2 + 3 × 4

d) Elemento neutro: todo número multiplicado por 1 da el mismo número.
Ejemplo: 7 × 1 = 7

e) Multiplicación por cero: cualquier número multiplicado por 0 es igual a 0.
Ejemplo: 5 × 0 = 0

4. TABLAS DE MULTIPLICAR

Las tablas de multiplicar son una herramienta fundamental. Se recomienda memorizar las del 1 al 10 para facilitar cálculos mentales y operaciones más complejas.

Ejemplo:
2 × 1 = 2
2 × 2 = 4
2 × 3 = 6
...
2 × 10 = 20

5. USO DE LA MULTIPLICACIÓN EN LA VIDA COTIDIANA

- Calcular precios al comprar varios productos iguales.
- Determinar la cantidad total de objetos en filas o grupos.
- Calcular áreas (largo × ancho).

III. DIVISIÓN

1. ¿QUÉ ES LA DIVISIÓN?

La división es el proceso de repartir o distribuir un número en partes iguales. Es la operación inversa de la multiplicación. Por ejemplo, si tenemos 12 caramelos y los repartimos entre 3 personas, a cada una le tocan 4: $12 \div 3 = 4$.

2. ELEMENTOS DE LA DIVISIÓN

Ejemplo: $12 \div 3 = 4$

- Dividendo: 12
- Divisor: 3
- Cociente: 4
- Resto (si hay): 0

3. TIPOS DE DIVISIÓN

a) División exacta: el resto es 0.
Ejemplo: $20 \div 5 = 4$

b) División inexacta: hay un resto distinto de 0.
Ejemplo: $22 \div 5 = 4$ y sobra 2 (resto 2)

4. PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN

a) No es conmutativa: $12 \div 3 \neq 3 \div 12$
b) No es asociativa: $(12 \div 3) \div 2 \neq 12 \div (3 \div 2)$
c) División por 1: cualquier número dividido entre 1 es él mismo.
Ejemplo: $9 \div 1 = 9$
d) No se puede dividir entre 0: $5 \div 0$ no tiene solución.

5. RELACIÓN ENTRE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

La división es la operación inversa de la multiplicación.

Ejemplo:
$6 \times 4 = 24 \rightarrow 24 \div 6 = 4$ y $24 \div 4 = 6$

Para verificar una división, se puede multiplicar el cociente por el divisor:
Ejemplo: $24 \div 6 = 4 \rightarrow 6 \times 4 = 24$

IV. ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

1. Identificar los datos importantes.
2. Determinar qué operación usar: multiplicar o dividir.

3. Aplicar la operación correcta.
4. Verificar el resultado con la operación inversa.
5. Dar respuesta completa con unidades si es un problema real.

V. EJEMPLOS RESUELTOS

1. Problema: Si una caja contiene 6 paquetes y hay 5 cajas, ¿cuántos paquetes hay en total?
   Solución: 6 × 5 = 30 paquetes.
2. Problema: Si tienes 24 caramelos y los repartes en 4 bolsitas, ¿cuántos caramelos hay en cada bolsita?
   Solución: 24 ÷ 4 = 6 caramelos por bolsita.
3. Problema: Un teatro tiene 12 filas con 10 butacas en cada una. ¿Cuántas butacas hay en total?
   Solución: 12 × 10 = 120 butacas.
4. Problema: Tienes 56 euros y compras libros que valen 8 euros cada uno. ¿Cuántos libros puedes comprar?
   Solución: 56 ÷ 8 = 7 libros.

VI. ERRORES COMUNES A EVITAR

- Confundir el orden de los factores o de los términos.
- No aplicar correctamente la jerarquía de operaciones.
- Olvidar verificar el resultado con la operación inversa.
- Dividir por cero, lo cual no está definido.
- Confundir multiplicación con suma repetida cuando hay más de dos factores.

VII. ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Memoriza las tablas del 1 al 10.
2. Crea tus propios problemas de la vida diaria usando multiplicación y división.
3. Resuelve ejercicios combinados con paréntesis.
4. Utiliza objetos como fichas o monedas para representar problemas.
5. Practica usando juegos o aplicaciones educativas.

EJERCICIOS DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN CON SOLUCIÓN Y EXPLICACIÓN

Nivel 1 – Básico (1-10)

1. **3 × 4 = ?**
   Explicación: Multiplicamos 3 veces el número 4.
   Solución: 3 × 4 = 12
2. **8 ÷ 2 = ?**
   Explicación: ¿Cuántas veces cabe el 2 en el 8?
   Solución: 8 ÷ 2 = 4
3. **5 × 6 = ?**
   Explicación: Cinco veces el número 6.
   Solución: 5 × 6 = 30
4. **9 ÷ 3 = ?**
   Explicación: Dividimos 9 en partes iguales de 3.
   Solución: 9 ÷ 3 = 3
5. **7 × 2 = ?**
   Explicación: Siete veces el número 2.
   Solución: 7 × 2 = 14
6. **12 ÷ 4 = ?**
   Explicación: ¿Cuántas veces entra el 4 en el 12?
   Solución: 12 ÷ 4 = 3
7. **10 × 3 = ?**
   Explicación: Diez veces el número 3.
   Solución: 10 × 3 = 30
8. **20 ÷ 5 = ?**
   Explicación: ¿Cuántas veces entra el 5 en 20?
   Solución: 20 ÷ 5 = 4
9. **6 × 6 = ?**
   Explicación: Seis veces el número 6.
   Solución: 6 × 6 = 36
10. **15 ÷ 3 = ?**
    Explicación: Dividimos 15 en grupos de 3.
    Solución: 15 ÷ 3 = 5

Nivel 2 – Intermedio (11-20)

11. **11 × 4 = ?**
    Explicación: Once veces cuatro.
    Solución: 11 × 4 = 44

12. **36 ÷ 6 = ?**
Explicación: ¿Cuántas veces entra el 6 en 36?
Solución: 36 ÷ 6 = 6

13. **12 × 7 = ?**
Explicación: Multiplicamos 12 por 7.
Solución: 12 × 7 = 84

14. **81 ÷ 9 = ?**
Explicación: Dividimos 81 en grupos de 9.
Solución: 81 ÷ 9 = 9

15. **13 × 5 = ?**
Explicación: Trece veces el número 5.
Solución: 13 × 5 = 65

16. **56 ÷ 7 = ?**
Explicación: ¿Cuántas veces entra el 7 en el 56?
Solución: 56 ÷ 7 = 8

17. **14 × 6 = ?**
Explicación: Multiplicamos 14 por 6.
Solución: 14 × 6 = 84

18. **72 ÷ 8 = ?**
Explicación: Dividimos 72 en 8 partes iguales.
Solución: 72 ÷ 8 = 9

19. **15 × 9 = ?**
Explicación: Quince veces el número 9.
Solución: 15 × 9 = 135

20. **108 ÷ 12 = ?**
Explicación: Dividimos 108 entre 12.
Solución: 108 ÷ 12 = 9

Nivel 3 – Avanzado (21-30)

21. **23 × 7 = ?**
Explicación: Multiplicamos 23 por 7.
Solución: 23 × 7 = 161

22. **144 ÷ 12 = ?**
Explicación: Dividimos 144 entre 12.
Solución: 144 ÷ 12 = 12

23. **35 × 8 = ?**
Explicación: Multiplicamos 35 por 8.
Solución: 35 × 8 = 280

24. **225 ÷ 15 = ?**
    Explicación: ¿Cuántas veces entra el 15 en 225?
    Solución: 225 ÷ 15 = 15
25. **48 × 6 = ?**
    Explicación: Multiplicamos 48 por 6.
    Solución: 48 × 6 = 288
26. **132 ÷ 11 = ?**
    Explicación: Dividimos 132 entre 11.
    Solución: 132 ÷ 11 = 12
27. **29 × 9 = ?**
    Explicación: Multiplicamos 29 por 9.
    Solución: 29 × 9 = 261
28. **360 ÷ 9 = ?**
    Explicación: Dividimos 360 entre 9.
    Solución: 360 ÷ 9 = 40
29. **125 × 4 = ?**
    Explicación: Multiplicamos 125 por 4.
    Solución: 125 × 4 = 500
30. **1000 ÷ 25 = ?**
    Explicación: ¿Cuántas veces entra el 25 en 1000?
    Solución: 1000 ÷ 25 = 40

CAPÍTULO 4: NÚMEROS ENTEROS

I. INTRODUCCIÓN

Los números enteros son una extensión de los números naturales que incluyen los negativos y el cero. Nos permiten representar situaciones como deudas, temperaturas bajo cero, cambios de nivel o movimientos hacia atrás. Comprender los números enteros es fundamental para el estudio de las matemáticas y otras ciencias.

II. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Se representan con la letra Z:
Z = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

Incluye:

- Números negativos: ..., -3, -2, -1
- Cero: 0
- Números positivos: 1, 2, 3, ...

III. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA

La recta numérica es una línea horizontal con el cero en el centro:

- A la derecha del 0 están los números positivos.
- A la izquierda del 0 están los números negativos.
- Cuanto más a la derecha, mayor es el número.
- Cuanto más a la izquierda, menor es el número.

Ejemplo:
-3 está a la izquierda de 0, por lo tanto, -3 < 0.
2 está a la derecha de -1, entonces 2 > -1.

IV. COMPARACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Reglas para comparar:

- Todo número positivo es mayor que cero.
- Todo número negativo es menor que cero.
- Entre dos negativos, es mayor el que está más cerca del cero.

Ejemplos:
-5 < -3 porque -5 está más lejos del cero.
4 > -2 porque 4 es positivo y -2 negativo.
0 > -1 y 0 < 3

V. VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número es su distancia al cero en la recta numérica, sin importar el signo.

Se representa como $|a|$
Ejemplos:
$|5| = 5$
$|-5| = 5$
$|0| = 0$

Propiedades:
$|a| \geq 0$ para todo número a
$|a| = |-a|$

VI. OPUESTOS O INVERSOS ADITIVOS

Dos números son opuestos si están a la misma distancia del cero pero en direcciones contrarias.

Ejemplos:
El opuesto de 3 es -3
El opuesto de -7 es 7
El opuesto de 0 es 0

Propiedad:
$a + (-a) = 0$

VII. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

1. SUMA

a) Mismo signo: se suman los valores absolutos y se mantiene el signo.
Ejemplo: $(-3) + (-5) = -8$

b) Signos distintos: se restan los valores absolutos y se usa el signo del número con mayor valor absoluto.
Ejemplo: $(-7) + 4 = -3$

2. RESTA

Restar es sumar el opuesto.
Ejemplo: $5 - 8 = 5 + (-8) = -3$
$(-6) - (-2) = -6 + 2 = -4$

3. MULTIPLICACIÓN

- Signos iguales: el resultado es positivo.
  Ejemplo: $(-4) \times (-3) = 12$
- Signos distintos: el resultado es negativo.
  Ejemplo: $(-5) \times 2 = -10$

4. DIVISIÓN

- Signos iguales: el cociente es positivo.
  Ejemplo: (-12) ÷ (-3) = 4
- Signos distintos: el cociente es negativo.
  Ejemplo: 20 ÷ (-4) = -5

VIII. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

1. Propiedad conmutativa (suma y multiplicación)
$a + b = b + a$
$a \times b = b \times a$

2. Propiedad asociativa (suma y multiplicación)
$(a + b) + c = a + (b + c)$
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

3. Propiedad distributiva
$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

4. Elemento neutro

- En la suma: 0
  $a + 0 = a$
- En la multiplicación: 1
  $a \times 1 = a$

IX. PROBLEMAS Y APLICACIONES REALES

1. Cambios de temperatura:
   Si la temperatura baja 5 grados y luego sube 3, el cambio neto es -5 + 3 = -2.
2. Finanzas:
   Si tienes -30 euros (deuda) y ganas 50, tu saldo es -30 + 50 = 20
3. Niveles de altura:
   Si un submarino está a -100 metros y sube 30 metros, está a -100 + 30 = -70 metros.

X. ERRORES FRECUENTES

- Confundir la suma con la resta de enteros.
- Olvidar el signo al operar.
- No usar el valor absoluto al comparar.
- Asumir que el valor absoluto conserva el signo.
- Multiplicar o dividir sin tener en cuenta los signos.

XI. EJERCICIOS SUGERIDOS

1. Representa en la recta los números: -3, 0, 4, -5

2. Calcula:
   a) -6 + 9
   b) -4 - 5
   c) (-7) × 3
   d) 20 ÷ (-5)
3. Escribe el opuesto de: -12, 6, 0
4. Ordena de menor a mayor: 3, -1, -5, 0
5. Resuelve:
   a) (-3) + (-2) + 4
   b) 6 - (-3)
   c) | -8 | + | 5 |

EJERCICIOS DE NÚMEROS ENTEROS CON SOLUCIÓN Y EXPLICACIÓN

Nivel 1 – Básico (1 al 10): Identificación, suma y resta

1. **¿Cuál es el opuesto de -7?**
   Explicación: El opuesto es el número con el mismo valor pero signo contrario.
   Solución: 7
2. **Escribe el valor absoluto de -9.**
   Explicación: El valor absoluto es la distancia al cero, siempre positivo.
   Solución: $|-9| = 9$
3. **5 + (−3)**
   Explicación: Se suman signos distintos → $5 - 3 = 2$
   Solución: 2
4. **(−4) + (−6)**
   Explicación: Se suman los valores absolutos y se conserva el signo negativo.
   Solución: −10
5. **(−7) − (−2)**
   Explicación: Restar un número negativo es sumar su opuesto → $-7 + 2 = -5$
   Solución: −5
6. **(−3) − 5**
   Explicación: −3 menos 5 es como sumar $-3 + (-5) = -8$
   Solución: −8
7. **|−10| + |5|**
   Explicación: $|-10| = 10$, $|5| = 5$ → $10 + 5 = 15$
   Solución: 15
8. **Ordena: −2, 3, 0, −5, 1**
   Explicación: Se ordenan de menor a mayor.
   Solución: −5, −2, 0, 1, 3
9. **¿Qué número es mayor: −8 o −4?**
   Explicación: Entre dos negativos, el más cercano al 0 es mayor.
   Solución: −4
10. **¿Cuál es menor: −6, 0 o 5?**
    Explicación: −6 es el más a la izquierda en la recta.
    Solución: −6

Nivel 2 – Intermedio (11 al 20): Multiplicación, división, combinadas

11. **(−4) × 3**
    Explicación: Signos distintos → resultado negativo.
    Solución: −12

12. **(−5) × (−2)**
Explicación: Signos iguales → resultado positivo.
Solución: 10

13. **20 ÷ (−4)**
Explicación: Signos distintos → resultado negativo.
Solución: −5

14. **(−30) ÷ (−6)**
Explicación: Signos iguales → resultado positivo.
Solución: 5

15. **(−3) × 4 × (−2)**
Explicación: (−3 × 4 = −12), (−12 × −2 = 24)
Solución: 24

16. **12 + (−7) − (−4)**
Explicación: 12 − 7 + 4 = 9
Solución: 9

17. **(−8) × (2 + 1)**
Explicación: Primero 2 + 1 = 3 → (−8) × 3 = −24
Solución: −24

18. **[(−6) + 4] × 2**
Explicación: (−6 + 4 = −2) → −2 × 2 = −4
Solución: −4

19. **[(−3) − 5] ÷ (−2)**
Explicación: (−3 − 5 = −8) → −8 ÷ (−2) = 4
Solución: 4

20. **[−10 + (−5)] × (−1)**
Explicación: −10 + (−5) = −15 → −15 × (−1) = 15
Solución: 15

Nivel 3 – Avanzado (21 al 30): Anidados, reglas de signos, razonamiento

21. **[(−3) × (−2)] + [(−4) × 5]**
Explicación: (−3 × −2 = 6), (−4 × 5 = −20) → 6 + (−20) = −14
Solución: −14

22. **(−6 + 3) × (−2)**
Explicación: (−6 + 3 = −3) → −3 × (−2) = 6
Solución: 6

23. **[(−7) − (−2)] × (−3)**
Explicación: (−7 + 2 = −5) → −5 × (−3) = 15
Solución: 15

24. **[(−12) ÷ 3] + [(−4) × (−2)]**
Explicación: (−12 ÷ 3 = −4), (−4 × −2 = 8) → −4 + 8 = 4
Solución: 4

25. **−[3 × (−2) − (−5)]**
Explicación: (3 × −2 = −6), (−6 − (−5) = −6 + 5 = −1) → −(−1) = 1
Solución: 1

26. **[(−9) + (−3) + (−1)] ÷ (−3)**
Explicación: −9 − 3 − 1 = −13 → −13 ÷ (−3) = 13 ÷ 3 = 4.33 (aprox)
Solución: 13 ÷ 3 ≈ 4.33

27. **[(−15) ÷ 5] − [(−6) × (−1)]**
Explicación: (−15 ÷ 5 = −3), (−6 × −1 = 6) → −3 − 6 = −9
Solución: −9

28. **[(−10 + 4) × 2] ÷ (−3)**
Explicación: (−10 + 4 = −6), (−6 × 2 = −12), (−12 ÷ −3 = 4)
Solución: 4

29. **$(-2)^3 + (-2)^2$**
Explicación: $(-2)^3 = -8$, $(-2)^2 = 4$ → −8 + 4 = −4
Solución: −4

30. **$[(-5)^2 - (-3)^2] \times (-1)$**
Explicación: $(-5)^2 = 25$, $(-3)^2 = 9$ → 25 − 9 = 16 → 16 × (−1) = −16
Solución: −16

CAPÍTULO 5: FRACCIONES

I. INTRODUCCIÓN

Las fracciones son una forma de representar partes iguales de un todo. Se usan cuando queremos expresar cantidades que no son enteras, como mitades, tercios, cuartos, etc. Las fracciones son fundamentales en matemáticas porque nos permiten trabajar con números racionales y entender la división y la proporción.

II. DEFINICIÓN DE FRACCIÓN

Una fracción está formada por dos números enteros separados por una línea horizontal:

- El número de arriba se llama numerador.
- El número de abajo se llama denominador.

Se escribe así: a/b, donde "a" es el numerador y "b" es el denominador, siendo $b \neq 0$.

Ejemplo: 3/4 significa 3 partes de un total de 4 partes iguales.

III. TIPOS DE FRACCIONES

1. **Fracciones propias:** El numerador es menor que el denominador (ejemplo: 2/5).
2. **Fracciones impropias:** El numerador es mayor o igual que el denominador (ejemplo: 7/4 o 5/5).
3. **Fracciones aparentes:** Son fracciones impropias cuyo numerador es múltiplo del denominador, y su valor es un número entero (ejemplo: 8/4 = 2).
4. **Fracciones mixtas:** Combinan un número entero y una fracción propia (ejemplo: 2 1/3).

IV. REPRESENTACIÓN DE FRACCIONES

Las fracciones pueden representarse:

- Numéricamente, como a/b.
- Visualmente, como la división de una figura en partes iguales y coloreando algunas partes.
- En la recta numérica, ubicando su valor entre números enteros.

V. OPERACIONES CON FRACCIONES

1. Suma y resta de fracciones

a) **Con el mismo denominador:**
Se suman o restan los numeradores y se mantiene el denominador.
Ejemplo: $3/7 + 2/7 = (3 + 2)/7 = 5/7$

b) **Con denominadores diferentes:**
Se reducen a común denominador, que suele ser el mínimo común múltiplo (mcm) de los

denominadores.
Ejemplo: 1/4 + 1/6
El mcm de 4 y 6 es 12.
Se transforman: 1/4 = 3/12, 1/6 = 2/12
Se suman: 3/12 + 2/12 = 5/12

---

2. Multiplicación de fracciones

Se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador.
Ejemplo: (2/3) × (4/5) = (2×4)/(3×5) = 8/15

---

3. División de fracciones

Para dividir una fracción entre otra, se multiplica la primera por el inverso de la segunda.
Ejemplo: (3/4) ÷ (2/5) = (3/4) × (5/2) = 15/8

---

4. Simplificación de fracciones

Una fracción está simplificada cuando el numerador y el denominador no tienen ningún factor común aparte de 1. Para simplificar, se divide numerador y denominador entre su máximo común divisor (mcd).
Ejemplo: Simplificar 12/18
El mcd de 12 y 18 es 6.
Dividir: 12 ÷ 6 = 2, 18 ÷ 6 = 3
Fracción simplificada: 2/3

VI. FRACCIONES EQUIVALENTES

Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad o valor. Para obtener fracciones equivalentes, se multiplica o divide numerador y denominador por el mismo número (distinto de cero).

Ejemplo:
1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8

VII. FRACCIONES MIXTAS Y NÚMEROS IMPROPIOS

- Para convertir una fracción impropia a mixta, se divide el numerador por el denominador y se expresa como número entero y fracción propia.
  Ejemplo: 7/3 = 2 (entero) y 1/3 (fracción), se escribe 2 1/3.
- Para convertir una fracción mixta a impropia, se multiplica el entero por el denominador y se suma el numerador, manteniendo el denominador.
  Ejemplo: 3 2/5 = (3×5 + 2)/5 = 17/5

VIII. COMPARACIÓN DE FRACCIONES

Para comparar fracciones:

1. Si tienen el mismo denominador, gana la que tiene mayor numerador.
2. Si tienen distinto denominador, se reducen a común denominador o se convierten a decimal.
3. También se puede convertir la fracción a decimal dividiendo numerador por denominador.

IX. APLICACIONES PRÁCTICAS

- Cocinar: medir ingredientes.
- División de objetos o cantidades en partes iguales.
- Proporciones en mapas, planos, modelos.
- Conceptos de probabilidad y estadística.

X. ERRORES COMUNES

- Sumar denominadores en suma o resta (incorrecto).
- No simplificar fracciones.
- No encontrar correctamente el común denominador.
- Confundir la multiplicación con la suma de numeradores y denominadores.
- Olvidar invertir la segunda fracción en la división.

XI. EJERCICIOS SUGERIDOS

1. Simplifica las fracciones: 8/12, 15/25, 9/27
2. Suma: 1/3 + 1/6
3. Resta: 5/8 − 3/8
4. Multiplica: 2/5 × 3/4
5. Divide: 7/9 ÷ 2/3
6. Convierte 11/4 en fracción mixta.
7. Convierte 3 2/7 en fracción impropia.
8. Compara: 3/7 y 4/9
9. Representa 5/6 en la recta numérica.
10. Simplifica y multiplica: (12/16) × (4/9)

EJERCICIOS DE FRACCIONES CON SOLUCIÓN Y EXPLICACIÓN

Nivel 1 – Básico (1 al 10): Simplificación, identificación, suma y resta con igual denominador

1. Simplifica la fracción 6/12.
   Explicación: El mcd de 6 y 12 es 6. Dividimos numerador y denominador por 6.
   Solución: 6 ÷ 6 = 1, 12 ÷ 6 = 2 → 1/2

2. Suma 1/4 + 2/4.
   Explicación: Mismo denominador, sumamos numeradores.
   Solución: (1+2)/4 = 3/4

3. Resta 5/8 − 3/8.
   Explicación: Mismo denominador, restamos numeradores.
   Solución: (5−3)/8 = 2/8 → simplificar 2/8 = 1/4

4. ¿Qué fracción es mayor: 3/7 o 5/7?
   Explicación: Mismo denominador, mayor numerador indica mayor fracción.
   Solución: 5/7 es mayor.

5. Simplifica 9/27.
   Explicación: El mcd de 9 y 27 es 9.
   Solución: 9 ÷ 9 = 1, 27 ÷ 9 = 3 → 1/3

6. Suma 2/5 + 1/5.
   Explicación: Mismo denominador, sumamos numeradores.
   Solución: 3/5

7. Resta 7/10 − 4/10.
   Explicación: 7−4 = 3, denominador igual.
   Solución: 3/10

8. ¿Cuál es el valor de 0/5?
   Explicación: Cero dividido por cualquier número (excepto cero) es 0.
   Solución: 0

9. Simplifica 4/16.
   Explicación: mcd de 4 y 16 es 4.
   Solución: 1/4

10. Suma 1/3 + 1/3.
    Explicación: 1+1=2, denominador igual.
    Solución: 2/3

Nivel 2 – Intermedio (11 al 20): Suma y resta con distinto denominador, multiplicación sencilla

11. Suma 1/4 + 1/6.
    Explicación: mcm de 4 y 6 es 12. Convertimos: 1/4=3/12, 1/6=2/12. Suma 3/12 + 2/12 = 5/12.
    Solución: 5/12

12. Resta 5/8 − 1/4.
    Explicación: mcm de 8 y 4 es 8. 1/4=2/8. 5/8 − 2/8=3/8.
    Solución: 3/8
13. Multiplica 2/3 × 3/4.
    Explicación: Multiplicamos numeradores y denominadores.
    Solución: (2×3)/(3×4) = 6/12 = 1/2
14. Simplifica 15/35.
    Explicación: mcd de 15 y 35 es 5.
    Solución: (15÷5)/(35÷5) = 3/7
15. Suma 2/7 + 3/14.
    Explicación: mcm de 7 y 14 es 14. 2/7=4/14. Suma: 4/14 + 3/14=7/14=1/2
    Solución: 1/2
16. Resta 9/10 − 2/5.
    Explicación: mcm de 10 y 5 es 10. 2/5=4/10. Resta: 9/10 − 4/10=5/10=1/2
    Solución: 1/2
17. Multiplica 5/8 × 4/5.
    Explicación: (5×4)/(8×5) = 20/40 = 1/2
    Solución: 1/2
18. Simplifica 24/36.
    Explicación: mcd de 24 y 36 es 12.
    Solución: (24÷12)/(36÷12) = 2/3
19. Suma 3/5 + 2/3.
    Explicación: mcm de 5 y 3 es 15. Convertimos: 3/5=9/15, 2/3=10/15. Suma: 19/15 = 1 4/15
    Solución: 1 4/15
20. Resta 7/6 − 5/12.
    Explicación: mcm de 6 y 12 es 12. 7/6=14/12. Resta: 14/12 − 5/12 = 9/12 = 3/4
    Solución: 3/4

Nivel 3 – Avanzado (21 al 30): División, fracciones mixtas, operaciones combinadas

21. Divide 3/4 ÷ 2/3.
    Explicación: Multiplicamos 3/4 × 3/2 = 9/8 = 1 1/8
    Solución: 1 1/8
22. Convierte 7/3 en fracción mixta.
    Explicación: 7 ÷ 3 = 2 y sobra 1 → 2 1/3
    Solución: 2 1/3
23. Convierte 4 2/5 en fracción impropia.
    Explicación: (4×5 + 2)/5 = 22/5
    Solución: 22/5

24. Suma 1 1/4 + 2 2/3.
   Explicación: Convertimos a impropias: 5/4 + 8/3. mcm=12 → 15/12 + 32/12=47/12=3 11/12
   Solución: 3 11/12

25. Resta 5 1/2 − 3 3/4.
   Explicación: Impropias: 11/2 − 15/4. mcm=4 → 22/4 − 15/4=7/4=1 3/4
   Solución: 1 3/4

26. Multiplica 1 2/3 × 3/5.
   Explicación: 1 2/3=5/3. Multiplicamos: (5/3)×(3/5)=15/15=1
   Solución: 1

27. Divide 7/8 ÷ 1 1/4.
   Explicación: 1 1/4=5/4. Dividir es multiplicar por el inverso: (7/8)×(4/5)=28/40=7/10
   Solución: 7/10

28. Simplifica y multiplica (12/15) × (10/18).
   Explicación: Simplificar 12/15=4/5, 10/18=5/9. Multiplicamos: (4/5)×(5/9)=20/45=4/9
   Solución: 4/9

29. Resuelve: (2/3 + 1/6) ÷ (3/4 − 1/2).
   Explicación: Suma numeradores: 2/3=4/6 +1/6=5/6. Resta denominadores: 3/4=6/8, 1/2=4/8 → 6/8−4/8=2/8=1/4. Dividir: (5/6) ÷ (1/4) = (5/6) × (4/1) = 20/6 = 10/3 = 3 1/3
   Solución: 3 1/3

30. Calcula: (1 1/2 × 3/4) − (2/3 ÷ 1/3).
   Explicación:

- 1 1/2 = 3/2
- Multiplicamos: (3/2) × (3/4) = 9/8 = 1 1/8
- Dividir: (2/3) ÷ (1/3) = (2/3) × (3/1) = 6/3 = 2
- Restar: 1 1/8 − 2 = −7/8
  Solución: −7/8

CAPÍTULO 6: DECIMALES

I. INTRODUCCIÓN

Los números decimales son una extensión del sistema de numeración decimal, que usamos para representar cantidades no enteras, es decir, valores fraccionarios o partes de un todo expresadas en base diez. Los decimales son fundamentales para la precisión en las mediciones, cálculos financieros, ciencias y en la vida diaria.

II. DEFINICIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Un número decimal es aquel que tiene una parte entera y una parte decimal separadas por una coma (en la notación española) o un punto decimal (en la notación anglosajona). Por ejemplo: 12,34 o 12.34.

La parte a la izquierda de la coma o punto es la parte entera, y la parte a la derecha es la parte decimal.

Ejemplo: 7,85 tiene 7 como parte entera y 85 como parte decimal.

III. LUGAR DE LOS DÍGITOS EN LOS DECIMALES

Cada posición a la derecha de la coma representa una fracción decimal con denominador potencia de 10:

- Primer decimal: décimas (1/10)
- Segundo decimal: centésimas (1/100)
- Tercer decimal: milésimas (1/1000)
- Cuarto decimal: diezmilésimas (1/10,000), etc.

Ejemplo: 4,276 = 4 + 2/10 + 7/100 + 6/1000

IV. CONVERSIÓN ENTRE FRACCIONES Y DECIMALES

- Para convertir una fracción con denominador potencia de 10 (10, 100, 1000,...) a decimal, se coloca el numerador en la posición correcta de la parte decimal.
  Ejemplo: 37/100 = 0,37
- Para convertir un decimal a fracción, se escribe el número sin la coma como numerador y el denominador es 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales.
  Ejemplo: 0,625 = 625/1000 y se simplifica a 5/8.

V. CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES

1. **Decimales exactos o finitos:** tienen un número limitado de cifras decimales. Ejemplo: 3,25
2. **Decimales periódicos:** tienen una secuencia de cifras que se repite indefinidamente.
    - Periódico puro: la repetición empieza justo después de la coma (ejemplo: 0,3333...)

- Periódico mixto: tiene una parte no periódica seguida de la parte periódica (ejemplo: 0,1666...)

VI. OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

1. **Suma y resta:**

- Se alinean las comas decimales y se realiza la operación como con números enteros.
- Se colocan ceros para igualar la cantidad de decimales si es necesario.

Ejemplo: 12,5 + 3,75
Se convierte en: 12,50 + 3,75 = 16,25

2. **Multiplicación:**

- Se multiplican como números enteros, ignorando la coma.
- Se coloca la coma en el resultado de modo que haya tantos decimales como la suma de los decimales de los factores.

Ejemplo: 1,2 × 3,45
1,2 tiene 1 decimal, 3,45 tiene 2 decimales → total 3 decimales.
Multiplicamos 12 × 345 = 4140.
Colocamos la coma: 4,140

3. **División:**

- Se convierte el divisor en un número entero multiplicando divisor y dividendo por la misma potencia de 10.
- Se realiza la división como con enteros y se coloca la coma en el cociente.

Ejemplo: 4,5 ÷ 0,3
Multiplicamos por 10: 45 ÷ 3 = 15

VII. REDONDEO DE NÚMEROS DECIMALES

Para simplificar los decimales o ajustar la precisión, se puede redondear un número decimal a cierto número de cifras decimales.

Regla general:

- Si el siguiente dígito es menor que 5, se deja igual el último dígito que queremos conservar.
- Si es 5 o mayor, se suma 1 al último dígito que conservamos.

Ejemplo: Redondear 3,276 a dos decimales:
El tercer decimal es 6 (>5), entonces aumentamos el segundo decimal de 7 a 8 → 3,28

VIII. COMPARACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Para comparar decimales:

- Igualamos la cantidad de decimales añadiendo ceros si hace falta.

- Comparamos cifra por cifra de izquierda a derecha.

Ejemplo: ¿Qué es mayor, 3,5 o 3,45?
3,5 = 3,50; 3,50 > 3,45 → 3,5 es mayor.

IX. USOS Y APLICACIONES

- En finanzas para expresar monedas.
- En medidas de longitud, peso, volumen, tiempo.
- En ciencias para resultados precisos.
- En tecnología y computación.

X. ERRORES COMUNES

- No alinear correctamente las comas en suma/resta.
- Confundir la posición de la coma al multiplicar.
- No convertir el divisor a entero en la división.
- Olvidar redondear o redondear incorrectamente.

XI. EJEMPLOS PRÁCTICOS

1. Suma: 2,35 + 1,8 = 4,15
2. Resta: 7,5 − 3,25 = 4,25
3. Multiplicación: 0,6 × 3,2 = 1,92
4. División: 5,4 ÷ 1,8 = 3
5. Redondea 4,678 a dos decimales = 4,68
6. Convierte 0,125 a fracción: 125/1000 = 1/8

EJERCICIOS DE DECIMALES CON SOLUCIÓN Y EXPLICACIÓN

Nivel 1 – Básico (1 al 10): Identificación, suma y resta con decimales sencillos

1. Suma 3,2 + 4,1
   Explicación: Se suman alineando la coma decimal. 3,2 + 4,1 = 7,3
   Solución: 7,3
2. Resta 5,5 − 2,3
   Explicación: Alineamos la coma y restamos: 5,5 − 2,3 = 3,2
   Solución: 3,2
3. ¿Cuál es mayor: 2,45 o 2,54?
   Explicación: Comparar decimal a decimal. 2,54 > 2,45
   Solución: 2,54 es mayor
4. Redondea 3,146 a dos decimales
   Explicación: El tercer decimal es 6 (>5), así que se suma 1 al segundo decimal (4) → 3,15
   Solución: 3,15
5. Convierte 0,75 a fracción
   Explicación: 75/100 = 3/4 simplificado
   Solución: 3/4
6. Multiplica 2,5 × 3
   Explicación: 2,5 × 3 = 7,5
   Solución: 7,5
7. Divide 4,8 ÷ 2
   Explicación: 4,8 ÷ 2 = 2,4
   Solución: 2,4
8. Suma 0,6 + 0,9
   Explicación: 0,6 + 0,9 = 1,5
   Solución: 1,5
9. Redondea 7,849 a un decimal
   Explicación: Segundo decimal es 4 (<5), entonces 7,8
   Solución: 7,8
10. Escribe en palabras 0,32
    Explicación: Treinta y dos centésimas
    Solución: Treinta y dos centésimas

Nivel 2 – Intermedio (11 al 20): Operaciones combinadas y conversión

11. Suma 4,25 + 3,1 + 0,05
    Explicación: 4,25 + 3,1 = 7,35 + 0,05 = 7,4
    Solución: 7,4

12. Resta 10,5 − 3,75
    Explicación: 10,50 − 3,75 = 6,75
    Solución: 6,75
13. Multiplica 1,2 × 0,5
    Explicación: 1,2 × 0,5 = 0,6
    Solución: 0,6
14. Divide 9,6 ÷ 0,8
    Explicación: Multiplicamos dividendo y divisor por 10 para eliminar decimal en divisor: 96 ÷ 8 = 12
    Solución: 12
15. Convierte 0,125 a fracción y simplifica
    Explicación: 125/1000 simplificado a 1/8
    Solución: 1/8
16. Redondea 5,6789 a tres decimales
    Explicación: El cuarto decimal es 9 (>5), sumamos 1 al tercer decimal (8) → 5,679
    Solución: 5,679
17. Suma 2,56 + 1,444
    Explicación: 2,560 + 1,444 = 4,004
    Solución: 4,004
18. Resta 8,001 − 3,999
    Explicación: 8,001 − 3,999 = 4,002
    Solución: 4,002
19. Multiplica 0,03 × 0,2
    Explicación: 0,03 × 0,2 = 0,006
    Solución: 0,006
20. Divide 0,81 ÷ 0,09
    Explicación: Multiplicamos por 100: 81 ÷ 9 = 9
    Solución: 9

Nivel 3 – Avanzado (21 al 30): Operaciones con varios decimales, redondeo y comparación

21. Calcula (2,5 + 3,75) − 1,125
    Explicación: 2,5 + 3,75 = 6,25. Luego 6,25 − 1,125 = 5,125
    Solución: 5,125
22. Multiplica 12,345 × 0,06
    Explicación: Multiplicamos 12345 × 6 = 74070, con 5 decimales en total → 0,74070
    Solución: 0,7407
23. Divide 7,5 ÷ 0,25
    Explicación: Multiplicamos por 100: 750 ÷ 25 = 30
    Solución: 30

24. Redondea 3,141592 a cuatro decimales
    Explicación: El quinto decimal es 9 (>5), sumamos 1 al cuarto decimal (5) → 3,1416
    Solución: 3,1416

25. Suma 0,333 + 0,666 + 0,001
    Explicación: 0,333 + 0,666 = 0,999 + 0,001 = 1,000
    Solución: 1,0

26. Resta 100,0001 − 99,9999
    Explicación: 100,0001 − 99,9999 = 0,0002
    Solución: 0,0002

27. Multiplica 0,125 × 0,4 × 0,8
    Explicación: 0,125 × 0,4 = 0,05; luego 0,05 × 0,8 = 0,04
    Solución: 0,04

28. Divide 0,0009 ÷ 0,03
    Explicación: Multiplicamos por 10000: 9 ÷ 300 = 0,03
    Solución: 0,03

29. Compara 0,123456 y 0,123455
    Explicación: Todos los dígitos son iguales excepto el último: 6 > 5, por tanto 0,123456 > 0,123455
    Solución: 0,123456 es mayor

30. Redondea 9,9999 a dos decimales
    Explicación: El tercer decimal es 9 (>5), sumamos 1 al segundo decimal (9), lo que provoca que 9,99 → 10,00
    Solución: 10,00

Capítulo 7: Porcentajes y Proporciones

I. INTRODUCCIÓN

Los porcentajes y proporciones son herramientas matemáticas que permiten comparar cantidades y expresar relaciones entre números de forma sencilla y práctica. Son muy útiles en finanzas, estadística, ciencias, y en la vida cotidiana para analizar descuentos, aumentos, tasas, entre otros.

II. PORCENTAJES

1. Definición:
   El porcentaje es una forma de expresar una cantidad como una fracción de 100. El símbolo % indica "por cada cien". Por ejemplo, 25% significa 25 de cada 100 unidades.
2. Conversión entre porcentaje, decimal y fracción:

- De porcentaje a decimal: dividir por 100. Ejemplo: 40% = 40/100 = 0,40
- De decimal a porcentaje: multiplicar por 100. Ejemplo: 0,75 × 100 = 75%
- De porcentaje a fracción: escribir el porcentaje como fracción sobre 100 y simplificar.
  Ejemplo: 50% = 50/100 = 1/2

3. Cálculo de un porcentaje de una cantidad:
   Para encontrar el x% de un número N, multiplicamos N por el decimal equivalente de x%.
   Ejemplo: ¿Cuál es el 20% de 150?
   20% = 0,20
   0,20 × 150 = 30
4. Incremento y decremento porcentual:

- Incremento: Cantidad original + (Cantidad original × porcentaje)
  Ejemplo: Un precio de 200 aumenta 10%. Nuevo precio = 200 + 200 × 0,10 = 220
- Decremento: Cantidad original − (Cantidad original × porcentaje)
  Ejemplo: Un precio de 200 se rebaja 10%. Nuevo precio = 200 − 200 × 0,10 = 180

5. Problemas inversos:
   Calcular la cantidad original sabiendo el porcentaje y el valor resultante.
   Ejemplo: Si 30 es el 20% de un número, ¿cuál es el número?
   Número = 30 ÷ 0,20 = 150

III. PROPORCIONES

1. Definición:
   Una proporción es una igualdad entre dos razones o fracciones. Se escribe a : b = c : d o como una igualdad de fracciones a/b = c/d.
2. Propiedad fundamental de las proporciones:
   El producto de los extremos es igual al producto de los medios.
   $a/b = c/d \rightarrow a \times d = b \times c$

3. Resolución de proporciones:
   Para encontrar un valor desconocido, se despeja y se usa la propiedad fundamental.
   Ejemplo: Si $3/4 = x/8$, entonces $3 \times 8 = 4 \times x \rightarrow 24 = 4x \rightarrow x = 6$
4. Aplicaciones:

- Escalas en mapas, planos y modelos
- Recetas de cocina
- Reparto proporcional
- Mezclas

IV. RELACIÓN ENTRE PORCENTAJES Y PROPORCIONES

El porcentaje es un caso particular de proporción en que el segundo término es 100. Es decir, $x\% = x/100$.

V. OPERACIONES CON PORCENTAJES Y PROPORCIONES

1. Conversión de porcentaje a proporción y viceversa.
2. Uso de proporciones para resolver problemas de porcentaje.
3. Composición y descomposición de porcentajes.
4. Resolución de problemas de mezcla y reparto usando proporciones.

VI. EJEMPLOS PRÁCTICOS

1. ¿Cuál es el 15% de 250?
   Solución: $0{,}15 \times 250 = 37{,}5$
2. Si un artículo cuesta 120 y tiene un descuento del 25%, ¿cuánto cuesta después del descuento?
   Solución: $120 - (120 \times 0{,}25) = 120 - 30 = 90$
3. Encuentra x en la proporción $5/7 = x/21$
   Solución: $5 \times 21 = 7 \times x \rightarrow 105 = 7x \rightarrow x = 15$
4. Si 40% de una clase son mujeres y hay 20 mujeres, ¿cuántos estudiantes hay en total?
   Solución: $\text{Total} = 20 \div 0{,}40 = 50$

VII. CONSEJOS Y RECOMENDACIONES

- Siempre convertir porcentajes a decimales para operar.
- Verificar que las proporciones sean iguales usando la propiedad fundamental.
- Usar la regla de tres para resolver problemas proporcionales de forma práctica.
- Practicar con problemas cotidianos para entender mejor los porcentajes y proporciones.

Ejercicios de Porcentajes y Proporciones con Solución y Explicación

---

Nivel 1 – Básico (1 a 10): Cálculo directo de porcentajes y proporciones sencillas

1. Calcula el 10% de 200.
   Solución: 10% = 0,10 → 0,10 × 200 = 20
   Explicación: Multiplicamos el número por el decimal equivalente al porcentaje.

2. Si un artículo cuesta 50 y tiene un descuento del 20%, ¿cuál es su precio final?
   Solución: Descuento = 20% × 50 = 10 → Precio final = 50 − 10 = 40
   Explicación: Calculamos el porcentaje y lo restamos.

3. Encuentra x en la proporción 2/5 = x/10.
   Solución: 2 × 10 = 5 × x → 20 = 5x → x = 4
   Explicación: Usamos la propiedad fundamental de las proporciones.

4. ¿Qué porcentaje es 15 de 60?
   Solución: (15/60) × 100 = 25%
   Explicación: La proporción se convierte a porcentaje multiplicando por 100.

5. Si 30 es el 60% de un número, ¿cuál es ese número?
   Solución: Número = 30 ÷ 0,60 = 50
   Explicación: Dividimos la parte por el porcentaje en decimal.

6. Aumenta 120 en un 15%.
   Solución: 120 + (120 × 0,15) = 120 + 18 = 138
   Explicación: Calculamos el incremento y lo sumamos.

7. Resta un 5% de 250.
   Solución: 250 − (250 × 0,05) = 250 − 12,5 = 237,5
   Explicación: Calculamos el descuento y lo restamos.

8. Si 8/12 = x/18, encuentra x.
   Solución: 8 × 18 = 12 × x → 144 = 12x → x = 12
   Explicación: Producto de extremos igual a producto de medios.

9. ¿Cuál es el 125% de 40?
   Solución: 1,25 × 40 = 50
   Explicación: El porcentaje mayor a 100% significa aumento.

10. Un producto pasa de 80 a 100. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?
    Solución: (100 − 80)/80 × 100 = 20/80 × 100 = 25%
    Explicación: Diferencia dividida entre el original multiplicado por 100.

Nivel 2 – Intermedio (11 a 20): Aplicaciones combinadas y problemas inversos

11. Si 45 representa el 30% de un total, ¿cuál es ese total?
    Solución: Total = 45 ÷ 0,30 = 150
    Explicación: Dividir parte por porcentaje en decimal para hallar total.

12. Un precio de 250 se incrementa en un 12%. ¿Cuál es el nuevo precio?
Solución: 250 + (250 × 0,12) = 250 + 30 = 280
Explicación: Calculamos aumento y sumamos.

13. Encuentra x si 7/9 = 14/x.
Solución: 7 × x = 9 × 14 → 7x = 126 → x = 18
Explicación: Igualamos producto de extremos y medios.

14. Un artículo tiene un precio rebajado de 180 a 135. ¿Cuál fue el porcentaje de descuento?
Solución: (180 − 135)/180 × 100 = 45/180 × 100 = 25%
Explicación: Diferencia sobre original.

15. ¿Qué porcentaje es 22.5 de 90?
Solución: (22,5 / 90) × 100 = 25%
Explicación: Parte sobre total.

16. Si el 40% de una clase son 12 alumnos, ¿cuántos alumnos hay en total?
Solución: Total = 12 ÷ 0,40 = 30
Explicación: Parte sobre porcentaje.

17. Multiplica 0,75 por 80%.
Solución: 0,75 × 0,80 = 0,60
Explicación: Multiplicar decimales.

18. Si un número aumentado en 15% es 138, ¿cuál es el número original?
Solución: Número original = 138 ÷ 1,15 ≈ 120
Explicación: Dividir resultado por (1 + porcentaje en decimal).

19. Encuentra x en la proporción x/20 = 3/5.
Solución: 5x = 3 × 20 → 5x = 60 → x = 12
Explicación: Producto cruzado.

20. El 55% de un número es 88. ¿Cuál es el número?
Solución: Número = 88 ÷ 0,55 = 160
Explicación: Dividir parte por porcentaje decimal.

Nivel 3 – Avanzado (21 a 30): Problemas con varios pasos y porcentajes compuestos

21. Un producto se rebaja un 10% y luego un 5% más. Si su precio original era 200, ¿cuál es el precio final?
Solución:
Primer descuento: 200 − 20 = 180
Segundo descuento: 180 − 9 = 171
Precio final = 171
Explicación: Aplicar descuentos sucesivamente.

22. Si una mezcla contiene jugo y agua en proporción 3:5, ¿cuántos litros de jugo hay en 40 litros de mezcla?
Solución: Total partes = 3 + 5 = 8
Jugo = (3/8) × 40 = 15 litros
Explicación: Usar proporción para repartir total.

23. Un salario sube un 12% y después otro 8%. ¿Cuál es el porcentaje total de aumento?
    Solución:
    Nuevo salario = 1,12 × 1,08 = 1,2096
    Aumento total = 20,96%
    Explicación: Multiplicación de factores de aumento.
24. Encuentra x si 4/x = 6/9.
    Solución: 4 × 9 = 6 × x → 36 = 6x → x = 6
    Explicación: Producto cruzado.
25. Si 60 es el 75% de un número, ¿cuál es ese número?
    Solución: Número = 60 ÷ 0,75 = 80
    Explicación: Parte dividido por porcentaje decimal.
26. Una cantidad se reduce en un 15% y luego se aumenta en un 10%. ¿Cuál es el cambio neto?
    Solución:
    Reducida = 1 − 0,15 = 0,85
    Aumentada = 0,85 × 1,10 = 0,935
    Cambio neto = 1 − 0,935 = 0,065 → 6,5% de reducción
    Explicación: Multiplicar factores y comparar.
27. El valor de un producto es proporcional al cuadrado de su tamaño. Si un tamaño de 4 tiene valor 36, ¿cuál es el valor para tamaño 6?
    Solución:
    Valor proporcional: $V = k \times tamaño^2$
    $36 = k \times 4^2 = k \times 16 \rightarrow k = 36/16 = 2{,}25$
    Para tamaño 6: $V = 2{,}25 \times 6^2 = 2{,}25 \times 36 = 81$
    Explicación: Aplicar proporción cuadrática.
28. Una receta para 4 personas lleva 300 g de arroz. ¿Cuánto arroz se necesita para 10 personas?
    Solución:
    Proporción directa: (10 × 300)/4 = 750 g
    Explicación: Regla de tres simple.
29. Si una cantidad es 20% mayor que otra que vale 150, ¿cuánto vale la mayor?
    Solución: 150 × 1,20 = 180
    Explicación: Multiplicación por factor.
30. En una proporción a : b = 5 : 7, si a + b = 72, ¿cuánto vale a?
    Solución:
    Suma partes = 5 + 7 = 12
    a = (5/12) × 72 = 30
    Explicación: Dividir total según partes proporcionales.

Capítulo 8: Potencias y Raíces

I. INTRODUCCIÓN

Las potencias y raíces son conceptos fundamentales en matemáticas que permiten expresar multiplicaciones repetidas y su operación inversa, respectivamente. Son esenciales para simplificar expresiones algebraicas, resolver ecuaciones y analizar funciones.

II. POTENCIAS

1. Definición:
   Una potencia es el resultado de multiplicar un número (base) por sí mismo un número determinado de veces (exponente).
   Se escribe como: a^n, donde a es la base y n el exponente.

2. Interpretación:

- $a^n = a \times a \times a \times ... \times a$ (n veces)
- Por ejemplo, $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

3. Propiedades de las potencias:

- Producto de potencias con la misma base: $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$
- Cociente de potencias con la misma base: $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$, con $a \neq 0$
- Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{(m\times n)}$
- Producto de potencias con el mismo exponente: $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- Potencia de un producto: $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- Potencia de cociente: $(a/b)^n = a^n / b^n$, $b \neq 0$

4. Potencia con exponente cero:
   Para cualquier $a \neq 0$, $a^0 = 1$

5. Potencia con exponente negativo:
   $a^{(-n)} = 1 / a^n$, con $a \neq 0$

6. Potencias de base 1 y 0:

- $1^n = 1$ para cualquier n
- $0^n = 0$ para $n > 0$

III. RAÍCES

1. Definición:
   La raíz n-ésima de un número a es el valor que elevado a la potencia n da como resultado a.
   Se escribe como: $\sqrt[n]{a}$

2. Raíz cuadrada (n=2):
   $\sqrt{a}$ es el número que al multiplicarse por sí mismo da a. Por ejemplo, $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$
3. Raíz cúbica (n=3):
   $\sqrt[3]{a}$ es el número que al elevarse al cubo da a. Ejemplo: $\sqrt[3]{27} = 3$ porque $3^3 = 27$
4. Propiedades de las raíces:

- $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{a / b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

5. Relación entre potencias y raíces:
   La raíz n-ésima de a se puede expresar como una potencia con exponente fraccionario:
   $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
   Por ejemplo, $\sqrt{16} = 16^{1/2} = 4$
6. Raíces de números negativos:

- La raíz cuadrada de un número negativo no está definida en los números reales (se usan números complejos).
- La raíz cúbica de un número negativo sí está definida y es negativa.

IV. OPERACIONES CON POTENCIAS Y RAÍCES

1. Simplificación de expresiones con potencias y raíces.
2. Conversión entre raíces y potencias con exponentes fraccionarios.
3. Multiplicación y división de potencias y raíces.
4. Potencias de potencias y raíces de potencias.

V. EJEMPLOS PRÁCTICOS

1. Simplifica: $2^3 \times 2^4$
   Solución: $2^{3+4} = 2^7 = 128$
2. Simplifica: $(3^2)^4$
   Solución: $3^{2\times4} = 3^8 = 6561$
3. Calcula: $\sqrt{81}$
   Solución: 9, porque $9^2 = 81$
4. Simplifica: $\sqrt[3]{8}$
   Solución: 2, porque $2^3 = 8$

5. Convierte $\sqrt{25}$ a potencia:
   $25^{1/2} = 5$
6. Simplifica: $(4^3)^{1/3}$
   Solución: $4^{3\times(1/3)} = 4^1 = 4$

VI. CONSEJOS Y RECOMENDACIONES

- Recuerda que la potencia con exponente negativo indica inverso.
- Utiliza las propiedades para simplificar antes de calcular.
- Expresa raíces como potencias para facilitar operaciones.
- Practica con números y variables para entender el uso algebraico.

Claro, aquí tienes 30 ejercicios de potencias y raíces con dificultad progresiva, cada uno con solución y explicación detallada:

Ejercicios de Potencias y Raíces con Solución y Explicación

Nivel 1 – Básico (1 a 10): Potencias y raíces simples

1. Calcula 3^4.
   Solución: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
   Explicación: Multiplicamos la base 3 por sí misma 4 veces.

2. Calcula $\sqrt{49}$.
   Solución: 7, porque $7 \times 7 = 49$
   Explicación: La raíz cuadrada es el número que elevado al cuadrado da 49.

3. Calcula 2^0.
   Solución: 1
   Explicación: Cualquier número distinto de cero elevado a 0 es 1.

4. Calcula 5^{-2}.
   Solución: $1 / 5^2 = 1 / 25 = 0.04$
   Explicación: Exponente negativo indica el inverso.

5. Simplifica $(2^3)^2$.
   Solución: $2^{3\times2} = 2^6 = 64$
   Explicación: Potencia de una potencia se multiplican exponentes.

6. Calcula $\sqrt[3]{27}$.
   Solución: 3, porque $3^3 = 27$
   Explicación: Raíz cúbica es el número que elevado al cubo da 27.

7. Simplifica 4^1.
   Solución: 4
   Explicación: Potencia con exponente 1 es el mismo número.

8. Calcula $(10^2) \div (10^1)$.
   Solución: $10^{2-1} = 10^1 = 10$
   Explicación: División de potencias con misma base resta exponentes.

9. Calcula $\sqrt{64}$.
   Solución: 8
   Explicación: $8 \times 8 = 64$.

10. Calcula 1^5.
    Solución: 1
    Explicación: 1 elevado a cualquier exponente es 1.

Nivel 2 – Intermedio (11 a 20): Propiedades y combinaciones

11. Simplifica $(3^4) \times (3^2)$.
    Solución: $3^{4+2} = 3^6 = 729$
    Explicación: Producto de potencias con misma base suma exponentes.

12. Calcula $\sqrt{100} + \sqrt{25}$.
    Solución: $10 + 5 = 15$
    Explicación: Raíz cuadrada de cada término y suma.

13. Simplifica $(5^3)^{1/3}$.
    Solución: $5^{3\times(1/3)} = 5^1 = 5$
    Explicación: Multiplicación de exponentes.

14. Calcula $\sqrt[4]{81}$.
    Solución: 3, porque $3^4 = 81$
    Explicación: Raíz cuarta.

15. Simplifica $(2^5) \div (2^3)$.
    Solución: $2^{5-3} = 2^2 = 4$
    Explicación: División de potencias.

16. Calcula $9^{1/2} + 16^{1/2}$.
    Solución: $3 + 4 = 7$
    Explicación: Exponente 1/2 es raíz cuadrada.

17. Simplifica $(6^0) \times (7^3)$.
    Solución: $1 \times 343 = 343$
    Explicación: Cualquier número a la 0 es 1.

18. Calcula $\sqrt[3]{-8}$.
    Solución: -2, porque $(-2)^3 = -8$
    Explicación: Raíz cúbica de número negativo es negativo.

19. Simplifica $(x^3)^2$.
    Solución: $x^{3\times2} = x^6$
    Explicación: Potencia de una potencia.

20. Calcula $(25^{1/2})^2$.
    Solución: 25
    Explicación: Elevar la raíz cuadrada al cuadrado devuelve el número original.

Nivel 3 – Avanzado (21 a 30): Combinación de potencias y raíces, exponentes fraccionarios

21. Simplifica $(8^{1/3})^2$.
    Solución: $8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^{3\times(2/3)} = 2^2 = 4$
    Explicación: Convertimos la base a potencia de 2, luego multiplicamos exponentes.

22. Calcula $\sqrt{50} \times \sqrt{2}$.
    Solución: $\sqrt{100} = 10$
    Explicación: Producto de raíces es raíz del producto.

23. Simplifica $(16^{3/4})$.
    Solución: $(16^{1/4})^3 = 2^3 = 8$
    Explicación: Raíz cuarta de 16 es 2, elevado a la 3.

24. Calcula $(27^{2/3}) \div (9^{1/2})$.
    Solución:

$27^{2/3} = (3^3)^{2/3} = 3^{2\times3/3} = 3^2 = 9$
$9^{1/2} = 3$
Resultado = $9 / 3 = 3$
Explicación: Convertir bases y usar propiedades.

25. Simplifica $\sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{2}$.
    Solución: $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27 \times 4} = 3 \sqrt[3]{4}$
    Explicación: Multiplicar dentro de raíz cúbica y simplificar.
26. Calcula $(32^{-1/5})$.
    Solución: $1 / 32^{1/5} = 1 / 2 = 0.5$
    Explicación: Raíz quinta de 32 es 2, con exponente negativo es inverso.
27. Simplifica $(x^{1/2} \times x^{3/2})$.
    Solución: $x^{(1/2 + 3/2)} = x^2$
    Explicación: Suma exponentes con misma base.
28. Calcula $\sqrt{(9^2)}$.
    Solución: $\sqrt{81} = 9$
    Explicación: Potencia y raíz inversas.
29. Simplifica $(64^{1/3})^2$.
    Solución: $(4)^2 = 16$
    Explicación: Raíz cúbica de 64 es 4, al cuadrado es 16.
30. Calcula $\sqrt[4]{81} \times \sqrt{9}$.
    Solución:
    $\sqrt[4]{81} = 3$ (porque $3^4 = 81$)
    $\sqrt{9} = 3$
    Producto = $3 \times 3 = 9$
    Explicación: Calcular raíces y multiplicar resultados.

Capítulo 9: Medidas y Unidades

I. INTRODUCCIÓN

Medir es comparar una cantidad con una unidad estándar para conocer su magnitud. Las medidas son fundamentales en la vida diaria, la ciencia, la ingeniería y muchas otras áreas. Para que las mediciones sean útiles, deben expresarse en unidades claras y aceptadas universalmente.

II. CONCEPTOS BÁSICOS

1. Magnitud física:
   Es una propiedad o característica de un objeto o fenómeno que puede medirse. Ejemplos: longitud, masa, tiempo, temperatura.
2. Unidad de medida:
   Es el patrón con el que se compara una magnitud para medirla. Ejemplo: metro, kilogramo, segundo.
3. Sistema de unidades:
   Conjunto de unidades estándar utilizadas para medir magnitudes. Los sistemas más comunes son:

- Sistema Internacional de Unidades (SI)
- Sistema Imperial

4. Medición:
   Proceso de determinar el valor de una magnitud con respecto a una unidad.

III. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

1. Base y derivadas:
   El SI se basa en unidades fundamentales para siete magnitudes:

- Longitud: metro (m)
- Masa: kilogramo (kg)
- Tiempo: segundo (s)
- Corriente eléctrica: amperio (A)
- Temperatura termodinámica: kelvin (K)
- Cantidad de sustancia: mol (mol)
- Intensidad luminosa: candela (cd)

De estas unidades base derivan muchas otras, por ejemplo:

- Área (m^2), volumen (m^3)
- Velocidad (m/s)
- Aceleración (m/s^2)

- Fuerza (newton, N) = $kg \cdot m/s^2$
- Energía (joule, J) = $N \cdot m$

2. Prefijos para múltiplos y submúltiplos:
   Para expresar cantidades muy grandes o muy pequeñas, se usan prefijos que multiplican la unidad base:

- kilo (k) = 10^3 = 1000
- centi (c) = 10^{-2} = 0.01
- mili (m) = 10^{-3} = 0.001
- micro (μ) = 10^{-6}
- mega (M) = 10^6
- giga (G) = 10^9

Ejemplo: 1 km = 1000 m, 1 mg = 0.001 g

IV. UNIDADES DE LONGITUD

1. Metro (m): Unidad básica de longitud en SI.
2. Otras unidades comunes:

- Kilómetro (km) = 1000 metros
- Centímetro (cm) = 0.01 metros
- Milímetro (mm) = 0.001 metros
- Micrómetro (μm) = 10^{-6} metros
- Nanómetro (nm) = 10^{-9} metros

3. Equivalencias con otros sistemas:

- 1 pulgada = 2.54 cm
- 1 pie = 12 pulgadas = 30.48 cm
- 1 milla = 1.609 km

V. UNIDADES DE MASA

1. Kilogramo (kg): Unidad base de masa en SI.
2. Otros múltiplos y submúltiplos:

- Gramo (g) = 0.001 kg
- Miligramo (mg) = 10^{-6} kg

3. Equivalencias en otros sistemas:

- 1 libra (lb) = 0.453592 kg

- 1 onza (oz) = 28.3495 g

VI. UNIDADES DE TIEMPO

1. Segundo (s): Unidad base de tiempo en SI.
2. Otras unidades comunes:

- Minuto (min) = 60 segundos
- Hora (h) = 60 minutos = 3600 segundos
- Día = 24 horas

VII. VOLUMEN Y CAPACIDAD

1. Volumen: Espacio ocupado por un objeto.

- Unidad SI: metro cúbico (m^3)
- Otros: litro (L) y mililitro (mL)

2. Equivalencias:

- 1 L = 1 dm^3 = 0.001 m^3
- 1 mL = 0.001 L

VIII. TEMPERATURA

1. Escalas comunes:

- Celsius (°C)
- Kelvin (K)
- Fahrenheit (°F)

2. Conversión entre Celsius y Kelvin:
   K = °C + 273.15
3. Conversión entre Celsius y Fahrenheit:
   °F = (°C × 9/5) + 32

IX. CONVERSIÓN DE UNIDADES

1. Importancia: Facilita la comparación y el cálculo entre diferentes unidades.
2. Método general: Multiplicar o dividir por factores de conversión que equivalen a 1.
   Ejemplo: Convertir 5000 cm a metros:
   5000 cm × (1 m / 100 cm) = 50 m

X. ERRORES EN LA MEDICIÓN

1. Error absoluto: Diferencia entre el valor medido y el valor real.

2. Error relativo: Cociente entre el error absoluto y el valor real, expresado en porcentaje.
3. Precisión y exactitud:

- Precisión: Repetibilidad de la medición.
- Exactitud: Cercanía al valor verdadero.

XI. EJEMPLOS PRÁCTICOS

1. Convierte 3.5 km a metros.
   3.5 km × 1000 m/km = 3500 m
2. Convierte 7500 mg a gramos.
   7500 mg × (1 g / 1000 mg) = 7.5 g
3. Convierte 2 horas a segundos.
   2 h × 3600 s/h = 7200 s
4. Si un recipiente tiene 2.5 L de agua, ¿cuántos mililitros tiene?
   2.5 L × 1000 mL/L = 2500 mL
5. Convierte 25°C a Kelvin.
   25 + 273.15 = 298.15 K

XII. CONSEJOS PARA TRABAJAR CON MEDIDAS Y UNIDADES

- Siempre anotar las unidades en los cálculos.
- Usar prefijos correctamente para evitar errores.
- Verificar las conversiones y hacer comprobaciones.
- Entender las diferencias entre sistemas de unidades y cuándo usar cada uno.
- Prestar atención a la precisión y exactitud de los instrumentos de medida.

TABLA DE MULTIPLICAR

Tabla del 1

1 × 1 = 1
1 × 2 = 2
1 × 3 = 3
1 × 4 = 4
1 × 5 = 5
1 × 6 = 6
1 × 7 = 7
1 × 8 = 8
1 × 9 = 9
1 × 10 = 10

Tabla del 2

2 × 1 = 2
2 × 2 = 4
2 × 3 = 6
2 × 4 = 8
2 × 5 = 10
2 × 6 = 12
2 × 7 = 14
2 × 8 = 16
2 × 9 = 18
2 × 10 = 20

Tabla del 3

3 × 1 = 3
3 × 2 = 6
3 × 3 = 9
3 × 4 = 12
3 × 5 = 15
3 × 6 = 18
3 × 7 = 21
3 × 8 = 24
3 × 9 = 27
3 × 10 = 30

Tabla del 4
4 × 1 = 4
4 × 2 = 8
4 × 3 = 12
4 × 4 = 16
4 × 5 = 20
4 × 6 = 24
4 × 7 = 28
4 × 8 = 32
4 × 9 = 36
4 × 10 = 40

Tabla del 5
5 × 1 = 5
5 × 2 = 10
5 × 3 = 15
5 × 4 = 20
5 × 5 = 25
5 × 6 = 30
5 × 7 = 35
5 × 8 = 40
5 × 9 = 45
5 × 10 = 50

Tabla del 6
6 × 1 = 6
6 × 2 = 12
6 × 3 = 18
6 × 4 = 24
6 × 5 = 30
6 × 6 = 36
6 × 7 = 42
6 × 8 = 48
6 × 9 = 54
6 × 10 = 60

Tabla del 7

7 × 1 = 7
7 × 2 = 14
7 × 3 = 21
7 × 4 = 28
7 × 5 = 35
7 × 6 = 42
7 × 7 = 49
7 × 8 = 56
7 × 9 = 63
7 × 10 = 70

Tabla del 8

8 × 1 = 8
8 × 2 = 16
8 × 3 = 24
8 × 4 = 32
8 × 5 = 40
8 × 6 = 48
8 × 7 = 56
8 × 8 = 64
8 × 9 = 72
8 × 10 = 80

Tabla del 9

9 × 1 = 9
9 × 2 = 18
9 × 3 = 27
9 × 4 = 36
9 × 5 = 45
9 × 6 = 54
9 × 7 = 63
9 × 8 = 72
9 × 9 = 81
9 × 10 = 90

Tabla del 10
$10 \times 1 = 10$
$10 \times 2 = 20$
$10 \times 3 = 30$
$10 \times 4 = 40$
$10 \times 5 = 50$
$10 \times 6 = 60$
$10 \times 7 = 70$
$10 \times 8 = 80$
$10 \times 9 = 90$
$10 \times 10 = 100$

---

números primos hasta el 1000:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,
31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,
73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113,
127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173,
179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229,
233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281,
283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349,
353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409,
419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463,
467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541,
547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601,
607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659,
661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733,
739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809,
811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863,
877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941,
947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997

FORMULAS UTILES

1. Área de un triángulo = (base * altura) / 2
2. Área de un rectángulo = base * altura
3. Área de un círculo = pi * radio^2
4. Perímetro de un cuadrado = 4 * lado
5. Perímetro de un rectángulo = 2 * (base + altura)
6. Volumen de un cubo = lado^3
7. Volumen de un cilindro = pi * radio^2 * altura
8. Volumen de una esfera = (4/3) * pi * radio^3
9. Distancia entre dos puntos (x1,y1) y (x2,y2) = sqrt((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2)
10. Pendiente de una recta = (y2 - y1) / (x2 - x1)
11. Ecuación general de una recta = y = mx + b
12. Interés simple = capital * tasa * tiempo
13. Interés compuesto = capital * (1 + tasa)^tiempo
14. Fórmula cuadrática para ax^2 + bx + c = 0: x = (-b ± sqrt(b^2 - 4ac)) / (2a)
15. Conversión Celsius a Fahrenheit = (C * 9/5) + 32
16. Conversión Fahrenheit a Celsius = (F - 32) * 5/9
17. Ley de Ohm: V = I * R
18. Potencia eléctrica: P = V * I
19. Trabajo mecánico: W = fuerza * desplazamiento * cos(θ)
20. Velocidad = distancia / tiempo
21. Aceleración = cambio de velocidad / tiempo
22. Fuerza = masa * aceleración
23. Presión = fuerza / área
24. Densidad = masa / volumen
25. Regla de tres simple: (a / b) = (c / x), resolver para x = (b * c) / a

Glosario de términos aritméticos básicos:

1. Número natural: número entero positivo (1, 2, 3, ...).
2. Número entero: número sin decimales, puede ser positivo, negativo o cero.
3. Número racional: número que puede expresarse como fracción de dos enteros.
4. Número decimal: número que tiene parte entera y parte fraccionaria separadas por una coma o punto.
5. Múltiplo: número que resulta de multiplicar otro número por un entero.
6. Divisor: número que divide a otro exactamente, sin dejar residuo.
7. Primo: número mayor que 1 que solo tiene dos divisores: él mismo y 1.
8. Compuesto: número natural mayor que 1 que no es primo.
9. Par: número entero divisible entre 2.
10. Impar: número entero no divisible entre 2.
11. Suma: operación de agregar dos o más números.
12. Resta: operación de quitar un número de otro.
13. Producto: resultado de una multiplicación.
14. Cociente: resultado de una división.
15. Residuo: parte que sobra en una división no exacta.
16. Fracción: expresión que representa una parte de un todo (numerador/denominador).
17. Porcentaje: fracción con denominador 100, indica partes por cada cien.
18. Media: promedio, suma de valores dividida entre la cantidad de valores.
19. Mínimo común múltiplo (mcm): menor número que es múltiplo común de dos o más números.
20. Máximo común divisor (mcd): mayor número que divide exactamente a dos o más números.
21. Potencia: número que indica cuántas veces se multiplica una base por sí misma.
22. Raíz cuadrada: número que multiplicado por sí mismo da como resultado el número original.
23. Redondeo: aproximación de un número al entero o decimal más cercano.
24. Aproximación: valor cercano a otro, pero no exacto.
25. Operación: cualquier cálculo con números (suma, resta, multiplicación, división, etc.).

Epílogo

A lo largo de estas páginas, hemos recorrido los fundamentos de la aritmética: desde los números naturales y las operaciones básicas, hasta fracciones, decimales, proporciones, porcentajes y problemas aplicados a la vida cotidiana. Cada ejercicio, cada explicación y cada desafío ha sido una invitación a comprender no solo cómo funcionan los números, sino también cómo podemos utilizarlos para pensar con claridad, tomar decisiones y resolver problemas reales.

La aritmética es mucho más que una herramienta para calcular. Es un lenguaje universal, una estructura lógica que acompaña a todas las ciencias, y una manera de entrenar la mente en el rigor, la paciencia y la precisión. Aprenderla es abrir una puerta a la comprensión más profunda del mundo.

Pero este libro no es un final. Es apenas un punto de partida. Si has llegado hasta aquí, ya has demostrado curiosidad, perseverancia y capacidad de razonamiento: las tres virtudes esenciales del pensamiento matemático. Lo que sigue está en tus manos. Tal vez continúes con el álgebra, la geometría o la estadística. Tal vez vuelvas a repasar lo aprendido para explicárselo a alguien más. Sea cual sea tu camino, recuerda siempre que aprender es una forma de libertad.

Gracias por acompañarnos en este viaje por la aritmética elemental. Que los números te sigan acompañando, no como un obstáculo, sino como una herramienta poderosa para comprender, construir y transformar el mundo.

El conocimiento suma. El esfuerzo multiplica. Nunca dejes de contar.